10. 3　幂级数

10.3.1　函数项级数的概念

10.3.2　幂级数及其收敛性

10.3.3　幂级数的性质

10.3.1 函数项级数的概念

1. 设$\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$为定义在区间$I$上的函数序列,则称

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots.$$

为区间I上的函数项级数.

对于确定的$x_0 \in I$,上式变为常数项级数:$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$

$\sum_{n=1}^{\infty} \cos^n x$　　当 $x = 0$时,级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} 1$　发散

当 $x = \frac{\pi}{3}$时,　级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 收敛

2. 收敛点与收敛域:

如果$x_0 \in I$, 数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$收敛, 则称$x_0$为级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的收敛点, 否则称为发散点.

函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的所有收敛点的全体称为收敛域, 所有发散点的全体称为发散域.

函数s: 收敛域 $\longrightarrow$ 实数域

$$x_0 \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = s(x_0)$$

$$x \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = s(x)$$

3. 和函数:

在收敛域上每一点, 函数项级数有一确定的和，是x的函数，记为 $s(x)$, 称为函数项级数的和函数， (定义域是收敛域)

$$s(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$$

在收敛域上，函数项级数的部分和 $s_n(x)$,

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x)=s(x)$$

余项 $r_n(x)=s(x)-s_n(x)$ $\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0$

注意 函数项级数在某点x的收敛问题,实质上是数项级数的收敛问题.

10.3.2 幂级数及其收敛性

1. 定义　形如$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$的级数称为幂级数.

其中a_n为幂级数系数.　当$x_0=0$时，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$,

任务：求幂级数的收敛域、和函数，并研究和函数的性质。

例1　级数　$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots$

$$s_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x} \quad \text{当 } x \neq 1 \text{时}$$

$$s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \frac{1}{1-x}$$

当$|x|<1$时, 收敛;

当$|x|\geq 1$时, 发散;

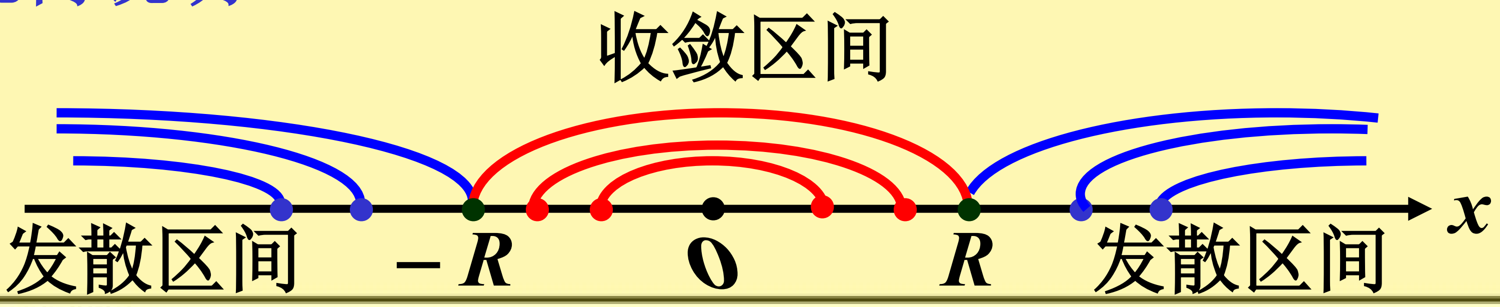
收敛域$(-1,1)$; 发散域$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

定理10.3.1(阿贝尔(Abel)定理)

如果级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x = x_0 (x_0 \neq 0)$处收敛, 则它在满足不等式$|x| < |x_0|$的一切 x 处绝对收敛;

如果级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x = x_0$处发散, 则它在满足不等式$|x| > |x_0|$的一切 x 处发散.

几何说明



2、幂级数的收敛半径及收敛区间

推论 如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$不是仅在$x=0$一点收敛，也不是在整个数轴上都收敛，则必有一个完全确定的正数 R 存在，它具有下列性质：

当$|x|<R$时，幂级数绝对收敛；

当$|x|>R$时，幂级数发散；

当$x=R$与$x=-R$时，幂级数可能收敛也可能发散.

定义 正数R称为幂级数的<u>收敛半径</u>.称 $(-R, R)$ 为幂级数的<u>收敛区间</u>.收敛域为$(-R, R)$, $[-R, R)$, $(-R, R]$, $[-R, R]$之一.

收敛域＝收敛区间∪{收敛的端点}

规定 (1) 幂级数只在$x = 0$处收敛,

$R = 0$, 收敛域为$x = 0$;

(2) 幂级数对一切 x 都收敛,

$R = +\infty$, 收敛域为$(-\infty, +\infty)$.

对级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ 以 $|x - x_0| < R$ 收敛, $|x - x_0| > R$ 发散定义收敛半径。

问题 如何求幂级数的收敛半径?

3、收敛半径的求法

定理10.3.2 如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的所有系数$a_n \neq 0$,

设 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$ (或 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho$)

(1) 则当$\rho \neq 0$时，$R = \frac{1}{\rho}$; (2) 当$\rho = 0$时,$R = +\infty$;

(3) 当$\rho = +\infty$时，$R = 0$.

证明 对级数 $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$ 应用达朗贝尔判别法

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|x| = \rho|x|,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|a_{n+1}x^{n+1}\right|}{\left|a_nx^n\right|}=\rho|x|,$$

(1) $\rho\neq 0,\rho\neq+\infty$

由比值审敛法，当$|x|<\frac{1}{\rho}$时，级数$\sum_{n=0}^{\infty}|a_nx^n|$收敛，

从而级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$绝对收敛.

当$|x|>\frac{1}{\rho}$时，级数$\sum_{n=0}^{\infty}|a_nx^n|$发散，

从而级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$发散. 收敛半径 $R=\frac{1}{\rho}$;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_nx^n|}=\rho|x|,$$

(2) 如果$\rho=0$, $\forall x\neq 0$,

有$\dfrac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_nx^n|}\to 0\ (n\to\infty)$, 级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_nx^n|$收敛,

从而级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$绝对收敛. 收敛半径 $R=+\infty$;

(3) 如果$\rho=+\infty$, $\forall x\neq 0$, 级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_nx^n|$发散,

由定理定理, 所以级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 发散.

收敛半径 $R=0$. 定理证毕.

注意 (1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$，或 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ 不存在，

不可以说幂级数没有收敛半径（一定有）

而是要用别的方法求R，如两边夹准则、拆项等。

(2) a_n不能等于零。

例2　求下列幂级数的收敛半径与收敛域

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n};\qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-nx)^n;$$

$$(3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!};\qquad (4)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{\sqrt{n}}(x-\frac{1}{2})^n.$$

解　(1) $\because \rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1\ \therefore R=1$

当$x=1$时，级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$，　该级数收敛

当$x=-1$时，　级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，　该级数发散

级数收敛域为(-1,1].

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-nx)^n$;

$$\because \rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}n=+\infty, \therefore R=0,$$

级数只在$x=0$点收敛。

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$;

$$\because \rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0, \quad \therefore R=+\infty,$$

收敛域为$(-\infty,+\infty)$.

$$(4)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{\sqrt{n}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{\sqrt{n}}t^n.$$

$$\because\ \rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}=2\quad\therefore R=\frac{1}{2},$$

即$\left|x-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$收敛，$x\in(0,1)$收敛，

当$x=0$时，级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$，发散

当$x=1$时，级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$，收敛

故收敛域为$(0,1]$.

例 3　求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2^n}$的收敛域

解　$\because$ 级数为$\frac{x}{2}+\frac{x^3}{2^2}+\frac{x^5}{2^3}+\cdots$　缺少偶次幂的项

应用达朗贝尔判别法,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1}/2^{n+1}}{x^{2n-1}/2^n}\right| = \frac{1}{2}|x|^2,$$

当$\frac{1}{2}x^2<1$,　即$|x|<\sqrt{2}$时,　级数收敛,

当$\frac{1}{2}x^2>1$,　即$|x|>\sqrt{2}$时,　级数发散,

例 3 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2^n}$的收敛域

当$\frac{1}{2}x^2<1$, 即$|x|<\sqrt{2}$时, 级数收敛,

当$\frac{1}{2}x^2>1$, 即$|x|>\sqrt{2}$时, 级数发散,

当$x=\sqrt{2}$时, 级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}$, 级数发散,

当$x=-\sqrt{2}$时, 级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{\sqrt{2}}$, 级数发散,

原级数的收敛域为$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

10.3.3 幂级数的性质

1. 代数运算性质:

设$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$和$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$的收敛半径各为$R_1$和$R_2$,

取 $R = \min\{R_1, R_2\}$

(1) 加减法

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n . \quad x \in (-R, R)$$

(其中 $c_n = a_n \pm b_n$)

(2) 乘法

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots)\cdot(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots)$$

$$= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \cdots$$

$$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)\cdot(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad x \in (-R, R)$$

(其中 $c_n = a_0 \cdot b_n + a_1 \cdot b_{n-1} + \cdots + a_n \cdot b_0$)

$$c_n = \sum_{\substack{i=0 \\ i+j=n}}^{n} a_i \cdot b_j$$

(2) 乘法

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n,\quad x\in\left(-R,R\right)$$

(其中 $c_n = a_0\cdot b_n + a_1\cdot b_{n-1}+\cdots+a_n\cdot b_0$)

柯西乘积

$$\begin{array}{ccccc}
1 & x & x^2 & x^3 & \cdots \\
a_0b_0 & a_0b_1 & a_0b_2 & a_0b_3 & \cdots \\
a_1b_0 & a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots \\
a_2b_0 & a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots \\
a_3b_0 & a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

(3) 除法　(收敛域内 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \neq 0$)

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n .$$

其中$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$满足　$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right)$

即有 $\begin{cases} a_0 = b_0 c_0 , \\ a_1 = b_0 c_1 + b_1 c_0 , \\ a_2 = b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0 , \\ \cdots \end{cases}$　从中可依次求出 $c_0, c_1, c_2, \cdots$

(3) 除法　　(收敛域内 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \neq 0$)

相除后的收敛区间比原来两级数的收敛区间小得多

取 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1,\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 1 - x$　　$\because$ 和存在

$\therefore$ 两级数收敛　　收敛区间为$(-\infty, +\infty)$

但 $\dfrac{1}{1-x} = \dfrac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

收敛区间为$(-1, 1)$

2. 和函数的分析运算性质:

(1) 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数$s(x)$在其收敛域内连续

(在端点处指单侧连续).（求和与求极限可交换次序）

$$\text{即} \lim_{x\to x_0}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^{\,n} = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x\to x_0}(a_n x^n)$$

(2) 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数$s(x)$在其收敛域

I上可积,且对$\forall x \in I$可逐项积分.

$$\text{即} \int_0^x s(x)dx = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n x^n dx$$

（求和与求积可交换次序）

(3) 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数$s(x)$在收敛区间$(-R, R)$内可导，并可逐项求导任意次.

即 $s'(x) = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)'$

（求和与求导可交换次序）

说明：

•幂级数经逐项求导或逐项积分后，所得幂级数的收敛半径不变；

反复应用上述结论，若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$收敛半径为$R$，

则它的和函数$s(x)$在区间$(-R,R)$内具有任意阶导数。

例4 求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$的和函数.

解 先求收敛域。由$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$,得$R=1$.

又 $x=-1$时, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$收敛.

$x=1$时,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散。故收敛域为$[-1,1)$.

设$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$, $x\in[-1,1)$ 由逐项求导公式，得

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$$

例4 求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$的和函数.

$$s'(x)=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\frac{1}{1-x}$$

$$(-1<x<1)$$

两边积分得 $\int_0^x s'(x)dx=\int_0^x\frac{1}{1-x}dx=\int_0^x\frac{1}{1-t}dt$

即 $s(x)-s(0)=\left[-\ln|1-t|\right]_0^x=-\ln(1-x)$

显然 $s(0)=0$, $\therefore s(x)=-\ln(1-x)$,

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x).\ (-1\le x<1)$$

在收敛区间的端点处的收敛性可能改变

例5 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$ 的和函数 $s(x)$.

解 易求出幂级数的收敛半径为1 ，$x=\pm 1$时，

级数发散. 故当 $x\in(-1\ ,\ 1\ )$时，$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$

两边积分得：$\int_0^x s(x)dx=\int_0^x(\ \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1})dx$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nx^{n-1}dx=\sum_{n=1}^{\infty} x^n=\frac{x}{1-x}$$

两边求导得 $s(x)=(\frac{x}{1-x})'=\frac{1}{(1-x)^2}$，$-1<x<1$

例：由几何级数的收敛得到的几个结论

$$1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\frac{1}{1-x}\quad(-1<x<1)$$

两边求导得

$$1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots=\frac{1}{(1-x)^2}\quad(-1<x<1)$$

两边积分得

$$x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots=-\ln(1-x)\quad(-1\le x<1)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

例 6 求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^n}$的和.

解 考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$， 收敛域(-1,1),

$$\text{则 } s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n=x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}\right)''$$

$$=x\left(\frac{x^2}{1-x}\right)''=\frac{2x}{(1-x)^3},$$

而 $\frac{1}{2}\in(-1,1)$， 故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^n}=s\left(\frac{1}{2}\right)=8.$

注1：求和函数的两种基本题型：

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2},\qquad -1<x<1.$$

$$(2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)\qquad -1\le x<1.$$

注2：一些变形：

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n}=x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1};\qquad \sum_{n=2}^{\infty} nx^{n-2}=\frac{1}{x}\sum_{n=2}^{\infty} nx^{n-1};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n};\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n};$$

$$(2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)\qquad -1\le x<1.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n2^n}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n2^n}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^n=-\frac{1}{x}\ln(1-\frac{x}{2})$$

注3：可利用代数运算– 拆项：

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n=\sum_{n=1}^{\infty}[n(n-1)+n]x^n=\sum_{n=1}^{\infty}n(n-1)x^n+\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$$

$$=x^2\sum_{n=1}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}+x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$$

定理 如果任意项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

满足条件 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \rho$（或 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\rho$）

则当 $\rho < 1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，且绝对收敛；

当 $\rho > 1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散（其中 ρ 可以为 $+\infty$）